Leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Développements :

Décomposition de Dunford, Invariants de similitude

Bibliographie :

Mansuy-Mneimné, Rombaldi, Gourdon, OA,

Rapport du jury 2016 :

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre Krus, connaître sa dimension sans hésiter ; s'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite s'intéresser à ses propriétés globales. Les liens entre réduction d'un endomorphisme u et la structure de l'algèbre Krus sont importants, tout comme ceux entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect applications est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, rappelons que pour calculer Ak , il n'est pas nécessaire en général de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent).

Rapport du jury 2017 :

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$ et connaître sa dimension sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre. Les liens entre réduction d'un endomorphisme u et la structure de l'algèbre $K[u]$ sont importants, tout comme ceux entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent).

1 L'algèbre des polynômes d'endomorphisme $K[u]$

1.1 L'algèbre $K[u]$

Définition 1 (Romb p593)**.** *[Gourdon p174][Mansuy p1] Pour tout polynôme P, définition de $P(u)$ avec u un endomorphisme de E.*

Proposition 2 (Mansuy p2)**.** *L'application qui à un polynôme P associe l'endomorphisme $P(u)$ est un morphisme d'algèbre. Son image, notée, $K[u]$ est une sous-algèbre commutative de $L(E)$.*

Proposition 3 (OA p161)**.** *$ker(\Phi_u)$ est un idéal non nul appelé idéal annulateur.*

Définition 4 (Mansuy p4)**.** *Le polynôme minimal de u est l'unique générateur unitaire de l'idéal annulateur.*

Proposition 5 (OA p161)**.** *Par théorème d'isomorphisme, $K[u] \simeq K[X]/(\pi_u)$. Si $\pi_u = P_1..P_r$ avec les P_i premiers entre eux deux à deux, par le théorème chinois, $K[u] \simeq K[X]/(P_1) \times ... \times K[X]/(P_r)$.*

Remarque 6 (OA p161)**.** *Cette écriture permet d'interpréter algébriquement des propriétés de réduction. Les propriétés de $K[u]$ (donc de π_u) sont intrinsèquement liées à celles de u.*

Exemple 7 (Mansuy p4)**.** *Polynôme minimal d'un projecteur.*

Proposition 8 (Mansuy p7)**.** *[Romb p596] La dimension de $K[u]$ est égal au degré de π_u, et une base est $(id, u, .., u^{deg(\pi_u)-1})$.*

Corollaire 9. *$K[u]$ est fermé.*

Application 10. *$exp(u) \in K[u]$.*

1.2 Polynômes annulateurs et π_u

Définition 11. *Un polynôme annulateur est un élément de l'idéal annulateur.*

Remarque 12. *P est annulateur si et seulement si $\pi_u|P$.*

Application 13 (Mansuy p5)**.** *Si P est annulateur et $P(0) \neq 0$ alors u est inversible et $u^{-1} \in K[u]$.*

Proposition 14 (Mansuy p5)**.** *u est inversible si et seulement si 0 n'est pas racine de son polynôme minimal.*

Proposition 15. *Si u est inversible alors $u^{-1} \in K[u]$ et $\pi_{u^{-1}} = X^{deg(u)}\pi_u(1/X)$.*

Application 16. *Calcul de u^n par division euclidienne par π_u, de même pour u^{-n} avec $\pi_{u^{-1}}$ calculé à partir de π_u.*

Proposition 17 (Romb p595)**.** *Deux endomorphisme semblables ont même polynôme minimal mais la réciproque est fausse.*

Proposition 18 (OA p161)**.** *Si F est un sev stable par u alors $\pi_{u_F}|\pi_u$.*

Proposition 19 (OA p162)**.** *Si $E = F_1 \bigoplus F_2$ alors $\pi_u = ppcm(\pi_{u_1}, \pi_{u_2})$.*

Proposition 20 (Mansuy ?)**.** *Si F est un sev stable par u, et $P \in K[X]$, alors $Ker(P(u_F)) = F \cap Ker(P(u))$.*

Proposition 21 (Mansuy p38)**.** *$ker(P(u)) = ker(pgcd(P, \pi_u)(u))$.*

Remarque 22 (Mansuy p38)**.** *Cela permet de limiter l'étude des sous-espaces de la forme $ker(P(u))$ aux seuls cas où $P|\pi_u$.*

Corollaire 23 (Mansuy p38)**.** *Si $P|\pi_u$ alors $\pi_{u|ker(P(u))} = P$.*

Théorème 24 (Mansuy p39)**.** *Lemme des noyaux.*

Application 25 (Mansuy p41)**.** *$E = \bigoplus_{i=1}^{p} ker(P_k^{\alpha_k}(f))$ où $\pi_u = \prod P_k^{\alpha_k}/$*

1.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Définition 26 (Mansuy p45)**.** *Valeur propre, vecteur propre, spectre, sous-espace propre.*

Définition 27 (Mansuy p45)**.** *Multiplicité géométrique.*

Proposition 28 (Mansuy p47)**.** *Les valeurs propres de u appartiennent à l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.*

Proposition 29 (Mansuy p48)**.** *Les valeurs propres de u sont exactement les racines du polynôme minimal de u.*

Exemple 30. *Si u est un projecteur non trivial, ses valeurs propres sont 0 et 1. Si u est nilpotent, ses valeurs propres sont 0.*

Définition 31 (OA p163)**.** *Polynôme caractéristique d'une matrice.*

Remarque 32 (OA p163)**.** *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.*

Définition 33 (OA p163)**.** *Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.*

Proposition 34. *Si F est stable par u alors $\chi_{uF}|\chi_u$.*

Application 35 (Gourdon p164)**.** *[Romb p634] Si λ est une racine de χ_u de multiplicité m_λ alors $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.*

Proposition 36. *Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme caractéristique.*

Application 37. *Si K est algébriquement clos, le spectre de u est non vide.*

Théorème 38 (Mansuy)**.** *Théorème de Cayley-Hamilton.*

Application 39. *$dim(K[u]) \leq n$.*

2 Décomposition en sous-espaces stables

2.1 Cas où π_u est scindé à racines simples : diagonalisation

Définition 40 (Mansuy p79)**.** *Diagonalisabilité.*

Théorème 41 (Mansuy p79...)**.** *[Romb p676][OA p166] u est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples si et seulement si χ_u est scindé et la multiplicité algébrique est égal à la multiplicité géométrique pour toute valeur propre.*

Exemple 42 (Mansuy p81)**.** *[OA p166] Les symétries et les projections sont diagonalisables. (Caractéristique $\neq 2$.)*

Exemple 43. *Le seul endomorphisme nilpotent diagonalisable est l'endomorphisme nul.*

Proposition 44 (OA p166)**.** *Si K est un corps fini, u est diagonalisable si et seulement si $u^q - u = 0$.*

Proposition 45 (OA)**.** *Les restrictions d'endomorphismes diagonalisables sont diagonalisables.*

2.2 Cas où π_u est scindé : trigonalisation

Définition 46 (Mansuy p93)**.** *Endomorphisme trigonalisable.*

Théorème 47 (Mansuy p93)**.** *u est trigonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.*

Exemple 48 (Mansuy p93)**.** *Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables.*

Proposition 49 (OA p166)**.** *Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.*

Proposition 50 (Mansuy p94)**.** *La restriction d'un endomorphisme trigonalisable est trigonalisable.*

3 Décompositions

3.1 Décomposition de Dunford

Proposition 51 (Romb p603)**.** *Décomposition de Dunford.*

Remarque 52. *Il existe un algorithme effectif.*

Remarque 53 (Romb p603)**.** *Décomposition de Dunford avec semi-simplicité.*

Application 54. *u est diagonalisable si et seulement si $exp(u)$ l'est.*

Application 55. *Calcul d'exponentielle matricielle.*

3.2 Réduction de Frobenius

Théorème 56 (Mansuy p124)**.** *Invariants de similitude.*

Application 57 (Mansuy p127)**.** *Réduction de Frobenius.*

Application 58. *Décomposition de Jordan des nilpotents.*

4 Applications

4.1 Applications de la diagonalisation

Application 59. *Calcul des puissances de A.*

Application 60 (OA p177)**.** *Equations différentielles linéaires de la forme $X' = AX$ où $A \in M_n(K)$ est diagonalisable. Pour $A = PDP^{-1}$ on se ramène à résoudre $Y' = DY$ $Y = P^{-1}X$.*

Remarque 61. *Parler de l'exponentielle d'une matrice ?*

Définition 62 (Mansuy p84)**.** *Co-diagonalisabilité.*

Proposition 63 (Mansuy p84)**.** *Une famille d'endomorphisme est codiagonalisable si et seulement si les endomorphismes commutent deux à deux et sont diagonalisables.*

4.2 Application à la trigonalisation

Application 64. *Résolution d'un système linéaire avec A trigonalisable. Pour $A = PTP^{-1}$, on pose $Y = P^{-1}X$ et on se ramène à $Y' = TY$ avec T trigonale supérieure.*

Proposition 65 (Mansuy p95)**.** *Une famille d'endomorphismes trigonalisables telle que les endomorphismes commutent deux à deux est cotrigonalisable.*